Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по квантовой теории
Толоконникову Андрею Владимировичу

Студентка указывает на ошибку.
А.В.: Во! Слова не мальчика… (пауза) Но женщины!

Я разделяю 5 типов задач по теме спина.

| | |
|---|---|
| **I: стационарное чистое состояние** | **II: стационарное смешанное состояние** |
| **III: нестационарное чистое состояние** | **IV: нестационарное смешанное состояние** |

И отдельно **V: доказательство тождеств с матрицами Паули и матричным вектором Паули.**

В прошлой методичке мы решали задачи типа I, и в этой тоже продолжим решать задачи типа I.

Решим упоротую задачу от Толоконникова
Спиновой столбец имеет вид
$$e^{i\alpha(-\sin\beta\,\hat\sigma_1+\cos\beta\,\hat\sigma_2)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$\hat\sigma_1, \hat\sigma_2$ - матрица Дирака.
Найти вероятности измерить $1/2$ и $-1/2$
при измерении проекции на ось $(\Psi;\varphi)$.

Решение:
Главное в решении – найти явный вид спинового столбца. Как только мы его найдём, мы домножим на матрицу поворота

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta\\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

и получим ответ.

Но вот только явного вида спинового столбца у нас в условии нет! Вместо него какая-то порнография: взят столбец $\binom{1}{0}$, на который действует какой-то очень упоротый оператор.

Разобьём решение на два шага: нахождение явного вида спинового столбца, а затем работа с ним. Можно сказать, что шаг 1 – это ловля рыбы, а шаг 2 – это уже её готовка. В некоторых задачах нам заранее приносят свежевыловленную рыбы, а вот здесь нам придётся сначала её поймать ☺

Шаг 1: вычислим явно то, что стоит в аргументе мнимой экспоненты:

$$-\sin\beta\,\hat{\sigma}_1 + \cos\beta\,\hat{\sigma}_2 = -\sin\beta\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \cos\beta\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & -ie^{-i\beta}\\ ie^{i\beta} & 0\end{bmatrix}.$$ Обозначим эту матрицу как $\hat{K}$. Она обладает тем свойством, что $\hat{K}^2 = \hat{I}$ (тождественной матрице $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$).

А для $\forall$ матрицы $\hat{K}$, для которой $\hat{K}^2 = \hat{I}$, верно, что

$$e^{i\alpha\hat{K}} = \hat{I}\cos\alpha + i\hat{K}\sin\alpha \qquad (1)$$

Мы эту формулу (1) докажем позднее.
Она – некий аналог формулы Эйлера:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Это частный случай формулы (1), если подставить $\hat{K} = \hat{I}$.

Однако (1) верна не для всех матриц, а лишь тех, квадрат которых равен $\hat{I}$.
К счастью, матрица из нашей задачи таковой является, поэтому вместо

$e^{i\alpha\hat{K}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ мы можем написать

$$\hat{I}\cos\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\hat{R}\sin\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \cos\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} +$$

$$+ i\sin\alpha\begin{bmatrix}0 & -ie^{-i\beta}\\ ie^{i\beta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\0\end{bmatrix} +$$

$$+ i\sin\alpha\begin{bmatrix}0\\ ie^{i\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\cdot e^{i\beta}\end{bmatrix}$$

Уряяяяя! Мы нашли явный вид спинового столбца. Теперь мы можем, как в прошлой методичке, сделать

Шаг 2) Тупо домножить матрично на матрицу поворота на (θ, φ):

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta\\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha e^{i\beta}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\theta e^{i(\beta-\theta)}\\ e^{i\varphi}\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha e^{i\beta}\end{bmatrix}$$

Если мы верхнюю строчку по модулю возведём в квадрат – получим вероятность получить +1/2, а если нижнюю – вероятность получить -1/2.

Например, в частном случае $\beta=\theta$

$p_{1/2}=\cos^2(\theta+\alpha)$;

$p_{-1/2}=1- p_{1/2}= \sin^2(\theta+\alpha)$.

Для выживших обсудим идею доказательства формулы (1). Надо расписать экспоненту от оператора в ряд Тейлора:

$$e^{i\alpha\hat{K}} = \sum_{n=0} \frac{(i\alpha)^n}{n!}\hat{K}^n$$

Разобьём отдельно суммы по четным и нечётным n:

$$= \underbrace{\sum_{n=0} \frac{(i\alpha)^n}{n!}\hat{K}^n}_{\text{по чётным}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!}\hat{K}^n}_{\text{по нечётным}}$$

Но $\hat{K}^2=\hat{I}$, значит, и $\hat{K}^4=\hat{I}$, и $\hat{K}^6=\hat{I}$. Т.е. в первом ряду все чётные степени $\hat{K}$ заменятся на $\hat{I}$.

Похожая история произойдёт во втором ряду: по аналогичным соображениям все нечётные степени $\hat{K}$ будут равны самому $\hat{K}$.

Итак, исходное выражение равно

$$= \underbrace{\sum_{n=0} \frac{(i\alpha)^n}{n!}\hat{I}}_{\text{по чётным}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!}\hat{K}}_{\text{по нечётным}}$$

Уже выглядит похоже на конечный результат. Осталось подсчитать два численных ряда. Первый будет равен cos α, второй – i*sin α. Отсюда и получим то, что надо доказать. Ура, победа.